Φιλοσοφία των Μαθηματικών

Είναι γνωστή η άποψη ότι ένας καλός φιλόσοφος πρέπει να ξέρει μαθηματικά. Όπως και ένας καλός μαθηματικός πρέπει να έχει γνώσεις φιλοσοφίας τουλάχιστον γύρω από το αντικείμενο του. Πολύ περισσότερο μάλιστα αν θέλει να είναι ταυτόχρονα καλός παιδαγωγός.

Η μαθηματική μεθοδολογία διαμορφώνεται σε σχέση με την κατανόηση της ως φιλοσοφική θεωρία γύρω από τις μεθόδους των γνωστικών διαδικασιών και του μετασχηματισμού της αντικειμενικής πραγματικότητας καθώς επίσης και της εφαρμογής της κοσμοθεωρίας μας στην γνωστική διαδικασία και την πνευματική δημιουργία γενικότερα.

Το κεντρικό ερώτημα που αφορά στη φύση των μαθηματικών και στην ανάπτυξη της επιστήμης είναι το εξής: "Οι άνθρωποι ανακαλύπτουν ή κατασκευάζουν τα μαθηματικά;" Ζούμε σε ένα κόσμο που καθορίζεται από σταθερούς μαθηματικούς κανόνες που ο άνθρωπος ανακάλυψε και κατέγραψε ή είναι τα μαθηματικά μια ανθρώπινη κατασκευή η οποία υποστηρίζει τις δημιουργίες μας; Ποιο από τα δύο προηγείται; Η γνώση είναι εκείνη που νομοθετεί και δημιουργεί την πραγματικότητα που βιώνουμε; Το όλον, που εμφανίζεται στο πνεύμα τελειοκρατικά, σαν νοημένη πραγματικότητα, είναι προϊόν του σκεφτόμενου εγκεφάλου που ιδιοποιείται τον κόσμο με τον τρόπο που του είναι δυνατός;

Ο Πλατωνισμός είναι κατα μερικούς ένα εποικοδομητικό τρόπο θεώρησης των μαθηματικών. Ο Πλάτων μέσα από τους διαλόγους του "Θεαίτητος", "Φαίδων", "Μένων", "Συμπόσιον", κλπ έφτασε στις "Ιδέες" του μέσο της απόσπασης των σχέσεων από τα συσχετιζόμενα πράγματα και τη μετατροπή των σχέσεων αυτών σε καθαρά πνευματικές υπεργήϊνες, οντότητες-ιδέες, απρόσιτες από οποιαδήποτε εμπειρία και αιώνιες, αντανακλώμενες στα γήϊνα πράγματα, αλλά ανεπηρέαστες από αυτά.

Ο Πλατωνισμός υποστηρίζει ότι οι μαθηματικές ιδέες υπάρχουν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη γνώση και ανακαλύπτονται από εμάς. Αποτελούν μέρος της φύσης και παραμένουν αμετάβλητα στον χρόνο. Για κάθε ερώτημα στα μαθηματικά υπάρχει και μια απάντηση προκαθορισμένη από τους βασικούς κανόνες των ίδιων των μαθηματικών. Αν κάποια ερωτήματα παραμένουν αναπάντητα είναι γιατί απλώς δεν έχουν ανακαλυφθεί ακόμα οι κατάλληλες διαδικασίες για τη λύση τους. Είναι η απόλυτη άποψη για τα μαθηματικά που τα θέλει ως ένα αμετάβλητο σώμα από μαθηματικές αλήθειες η οποία εκφράζει την πεποίθηση για την βέβαιη και χωρίς ψεγάδια μαθηματική γνώση.

Οι παραγωγικές μέθοδοι της λογικής κάνουν δυνατή τη διατήρηση της μαθηματικής αλήθειας, ενώ η μαθηματική γνώση επεκτείνεται με την ανακάλυψη νέων αποτελεσμάτων τα οποία στερούνται αναφοράς στον φυσικό κόσμο. Για αιώνες το μοντέλο του προγράμματος αυτού ήταν η γεωμετρία των "Στοιχείων" του Ευκλείδη. Ωστόσο, αυτή η απόλυτη θέση κλονίστηκε από τα μέσα του 18ου αιώνα όταν οι Lobachevsky - Bolyai και Rieamann αρνούμενοι το 5ο αίτημα του Ευκλείδη παρήγαγαν αντιφάσεις, κάτω από την απόλυτη θέαση του Πλατωνισμού, εντός του Ευκλειδίου συστήματος.

Οι Πλατωνιστές για να διασώσουν την ισχύ της θεωρίας τους περί της απολυτότητας των μαθηματικών αντικειμένων, αναζήτησαν στήριξη στην αριθμητική, όπου η τυποποίηση της αριθμητικής από τη θεωρία συνόλων και τη λογική φάνηκε να βοηθάει. Όμως και αυτή η προσπάθεια δεν καρποφόρησε εξ' αιτίας των συνολοθεωρητικών παραδόξων. Όμως παρά την αποτυχία των προσπαθειών για την αξιωματικοποίηση των μαθηματικών, οι Πλατωνιστές διατηρούν την άποψη τους για τα μαθηματικά ως ενσάρκωση της αλήθειας της φύσης.

"Η πλατωνική θέση είναι αυτή που οι περισσότεροι μαθηματικοί θα προτιμούσαν να πάρουν. Δεν αναρωτιούνται παρά μόνο όταν μάθουν για τις δυσκολίες της θεωρίας συνόλων. Αν αυτές οι δυσκολίες τους αναστατώσουν, τότε θα σπεύσουν στο καταφύγιο του φορμαλισμού" (P. Cohen, 1971).

Ο φορμαλισμός (με κυριότερο εκφραστή τον D. Hilbert) αποδέχεται ότι τα μαθηματικά δεν αντιστοιχούν στον κόσμο της εμπειρίας και αρνούνται όλους τους μηχανισμούς της αναπαράστασης προκειμένου να διασώσουν την συνέπεια τους. Οι φορμαλιστές θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι αντικείμενα χωρίς νόημα και εμφανίζουν τα τυπικά συστήματα και το παιχνίδι των συμβόλων και των ορισμών ως το μοντέλο της αλήθειας και της βεβαιότητας. Ωστόσο ούτε έτσι δικαιώνεται η απόλυτη θέση των μαθηματικών αντικειμένων, αφού ο Godel το 1930 απέδειξε ότι τα συνεπή τυπικά συστήματα ακόμα και στο βασικό επίπεδο της αριθμητικής στερούνται πληρότητας.

"Για πολλά εκπαιδευμένα πρόσωπα, τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που χαρακτηρίζεται από σίγουρα και αλάθητα αποτελέσματα των οποίων βασικά στοιχεία είναι οι αριθμητικές πράξεις, οι αλγεβρικές διαδικασίες και οι γεωμετρικοί όροι και θεωρήματα" (A. Thompson, 1992).

Για τους χρήστες και κάποιους καθηγητές των μαθηματικών ο φορμαλισμός μεταφράζεται σε μια εργαλειακή αντίληψη για τα μαθηματικά. Οι περισσότεροι καθηγητές μαθηματικών είναι φορείς της αντίληψης θεωρώντας τα μαθηματικά ως σύνολο από κανόνες που όταν χρησιμοποιηθούν σωστά παράγουν μοναδικές σωστές απαντήσεις. Έτσι, ενισχύεται η απόλυτη Πλατωνική και Φορμαλιστική φιλοσοφία, παρά τα προβλήματα που αυτές έχουν.

Παρουσιάζονται κατόπιν στο άρθρο οι βασικές αρχές του ιντουϊσιονισμού (διαισθητισμός) στα μαθηματικά όπως αναπτύχθηκε από Brower για μη τελειοκρατική γνώση των μαθηματικών αντικειμένων (πχ. του συνόλου των ακεραίων αριθμών, όπως εκφράστηκε και από τον Kronecker). Ο ιντουϊσιονισμός υποστηρίζει ότι μόνο προβλέψεις μπορούμε να κάνουμε για τα μαθηματικά αντικείμενα και όχι τελικές κρίσεις γι' αυτά, αφού αυτό που γνωρίζουμε πχ. για το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι η διαδικασία κατασκευής του βήμα προς βήμα και όχι το σύνολο ως ολότητα. Είναι αυτό που ο Hilbert αποκαλεί "μερική κρίση".

"Η πραγματικότητα δεν είναι τίποτε άλλο από συλλογική διαίσθηση" (L. Tomlin).

Στα πλαίσια της ιντουϊσιονιστικής θεωρίας η οποία αρνήται οτιδήποτε δεν γίνεται αντιληπτό από τις αισθήσεις και την εμπειρίας μας πολλά από τα βασικότερα εργαλεία των μαθηματικών που συνήθως χρησιμοποιούμε χάνουν την εγκυρότητα τους αφού πολλές αποδείξεις παύουν να ισχύουν. Για παράδειγμα οι αποδείξεις που βασίζονται στην εις άτοπον απαγωγή δεν είναι ποια έγκυρες. Η δίτιμη αριστοτέλεια λογική σύμφωνα με την οποία κάτι είναι ψευδές ή λάθος και η οποία βασίζεται στον νόμο αποκλεισμού του τρίτου παύει να ισχύει αφού κανείς δεν μπορεί να μας διαβεβαιώσει ότι δεν υπάρχει και μια τρίτη πιθανή τιμή αληθείας. Έτσι, στα πλαίσια του ιντουϊσιονισμού έγκυρες θεωρούνται μόνο οι κατασκευαστικές αποδείξεις. Υπαρκτό για τους ιντουϊσιονιστές σημαίνει κατασκευαστικά υπαρκτό και πεπερασμένα ελέγξιμο. Ενώ οποιαδήποτε άλλη απόδειξη ύπαρξης δεν είναι αποδεκτή. Για τους ιντουϊσιονιστέ δεν απαιτείται κάποιο θεώρημα πληρότητας - τουλάχιστον στην μορφή του κλασικού θεωρήματος του Godel - για τη δικαίωση της ιντουϊσιονιστικής πρακτικής. Η ίδια η ιντουϊσιονιστική πρακτική είναι ο φορέας αλήθειας της με τις πεπερασμένα ελέγξιμες αποδείξεις της που στηρίζονται στην διαισθητική έννοια των φυσικών αριθμών. (Ο Brower όπως και ο Kant πίστευε στην διαίσθηση του χρόνου από την οποία προκύπτει η διαίσθηση του φυσικού αριθμού).

Οι μαθηματικοί απορρίπτουν σχεδόν στο σύνολο τους τον ιντουϊσιονισμό του Brower για την δυσκαμψία, τις ελλείψεις και γενικότερα την αναποτελεσματικότητα του ως ικανοποιητική προσέγγιση, εκφράζει τις επιφυλάξεις του στον Πλατωνισμό στην απόλυτη μορφή του. Υποστηρίζει μια μορφή ελεγχόμενου Πλατωνισμού, πιο μετριοπαθούς, στα πλαίσια του οποίου είναι θεμιτό να αναπτύσσουμε την μαθηματική γνώση κατά τρόπο όμως ελεγχόμενο, ώστε τα αξιώματα που εισάγουμε στις θεωρίες να προκύπτουν από την νόηση μας κατά τρόπο φυσικό, όχι τελείως αυθαίρετα. Στο ερώτημα ποιοι θα είναι οι μηχανισμοί εκείνοι που εξασφαλίζουν την καταλληλότητα και την εγκυρότητα μιας τέτοιας κατασκευής δεν απαντά άμεσα. Εκφράζει την πεποίθηση όμως ότι αν υπάρχει περίπτωση να είναι προβληματικό το σύστημα θα πρέπει να πάσχει στα αντίστοιχα σημεία όπως εκείνα των γνωστών συνολοθεωρητικών παραδόξων (πχ. των Rusell - Zermelo) και τα σημεία αυτά πρέπει να ελέγχουμε. "Η έννοια της υπεροχής των μαθηματικών ως ενός καθολικά αποδεκτού και αλάθητου σώματος αιτιολόγησης, είναι μια μεγάλη ψευδαίσθηση" (M. Kline, 1980).

"Στον βαθμό που οι προτάσεις των μαθηματικών δίνουν μια περιγραφή της πραγματικότητας δεν είναι βέβαιες και στον βαθμό που είναι βέβαιες, δεν περιγράφουν την πραγματικότητα" (A. Einstein, 1921).

ΑΝΑΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ ΑΠΟ: http://users.forthnet.gr/ath/thantas77/edu/project023.html
Θάνος Τάσιος