Τα διασημότερα προβλήματα της χιλιετίας μας....
6 παραμένουν ακόμα άλυτα.......

Πρόβλημα Γκόλντμπαχ

Στις 7 Ιουνίου 1742 ο Κρίστιαν Γκόλντμπαχ έστειλε μία επιστολή στον Λέοναρντ Όιλερ, στην οποία έκανε μια πρώτη αναφορά στην εξής εικασία:

Κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων.

Θεωρούσε βέβαια ως δεδομένο ότι το 1 είναι πρώτος αριθμός, σύμβαση που μεταγενέστερα εγκαταλείφθηκε. Έτσι σήμερα η αρχική θεωρία του Goldbach θα γραφόταν ως εξής

Κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 5 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών πρώτων.

Ο Όιλερ απάντησε με μία ισοδύναμη εκδοχή της εικασίας:

Κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων,

προσθέτοντας ότι το δέχεται ως ένα πλήρως ορισμένο θεώρημα ("ein ganz gewisses Theorema"), παρά το γεγονός ότι δεν είναι σε θέση να το αποδείξει. Αυτή η προγενέστερη εικασία είναι σήμερα γνωστή ως "τριαδική" εικασία του Γκόλντμπαχ, ενώ η μεταγενέστερη ως "ισχυρή" ή "δυαδική" εικασία του Γκόλνμπαχ. Η εικασία ότι όλοι οι περιττοί αριθμοί μεγαλύτεροι του 9 μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα τριών περιττών πρώτων αριθμών καλείται ως η "αδύναμη" εικασία του Γκόλντμπαχ. Και οι δύο παραμένουν άλυτες μέχρι σήμερα.

Δεύτερη Εικασία του Γκόλντμπαχ

Η δεύτερη εικασία αναφέρει ότι *κάθε περιττός ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 3 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα τριών πρώτων*.

Πρόβλημα P v. NP

Οι επιστήμονες των ηλεκτρονικών υπολογιστών αναγνώρισαν δύο είδη προβλημάτων, που μπορεί να επιλύσει ένας υπολογιστής. Προβλήματα τύπου P μπορούν να επιλυθούν «αποτελεσματικά», δηλαδή να δώσουν λύση έπειτα από «λογικό» αριθμό αριθμητικών πράξεων. Προβλήματα τύπου Ε, αντίθετα, απαιτούν υπολογιστική ισχύ, που ξεπερνάει σε πολυπλοκότητα τον συνολικό αριθμό ατόμων στο Σύμπαν.
Υπάρχει, όμως, και τρίτο είδος προβλήματος, τύπου NP, που συμπεριλαμβάνει τις περισσότερες περίπλοκες ασκήσεις που η βιομηχανία και ο εμπορικός τομέας θα ήθελαν να επιλύουν οι υπολογιστές. Ασκηση τύπου NP μπορεί να επιλυθεί αποτελεσματικά από υπολογιστή, εφόσον σε κρίσιμα σημεία του υπολογισμού, το μηχάνημα λαμβάνει έτοιμη την απάντηση, αντί να εργαστεί για να φθάσει σε αυτή. Το ζήτημα είναι βέβαια θεωρητικό, καθώς παραμένει το ζήτημα από πού θα εξασφαλίσει ο υπολογιστής την απάντηση.
Αν ένας υπολογιστής είχε την ικανότητα αυτή, το εύρος των προβλημάτων που μπορεί να αναλάβει θα αυξανόταν άραγε σημαντικά; Η προφανής απάντηση είναι, ναι. Ισως, όμως,

και όχι. Ισως όλες οι ασκήσεις τύπου NP είναι στην πραγματικότητα ασκήσεις τύπου P. Ισως δηλαδή η αποτελεσματικότητα στην επίλυση προβλημάτων που θα ακολουθούσε την τροφοδότηση του μηχανήματος με έτοιμες απαντήσεις να είναι εφικτή, χάρη σε έξυπνο προγραμματισμό του υπολογιστή.
Αντικείμενο του προβλήματος P v. NP είναι να προσδιορίσει εάν αυτό ισχύει. Εάν αυτό αποδειχθεί, τότε οι πρακτικές εφαρμογές σε βιομηχανία, εμπόριο, αλλά και στην ασφάλεια του Ιντερνετ θα είναι σημαντικές.

Υπόθεση του Χοτζ
Πρόκειται για ένα από τα σημαντικότερα άλυτα μαθηματικά προβλήματα της αλγεβρικής γεωμετρίας. Κατά τη διάρκεια του 20ού αιώνα, πολλοί μαθηματικοί ανακάλυψαν καλές μεθόδους έρευνας περίπλοκων αντικειμένων. Η βασική ιδέα αφορά το ερώτημα, σε ποιο βαθμό μπορούμε να πλησιάσουμε τη μορφή ενός δεδομένου αντικειμένου, κολλώντας μεταξύ τους απλά γεωμετρικά δομικά στοιχεία, αυξανόμενου μεγέθους.
Η τεχνική αυτή αποδείχθηκε τόσο χρήσιμη, που γενικεύθηκε με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, οδηγώντας τελικά στη δημιουργία πανίσχυρων εργαλείων, που επέτρεψαν στους μαθηματικούς να πραγματοποιήσουν άλματα στην ταξινόμηση της ποικιλίας αντικειμένων, που συναντούσαν στις έρευνές τους. Δυστυχώς, η γεωμετρική προέλευση της μεθόδου χάθηκε μέσα στην περιπλοκότητα του ορισμού της. Υπό μία έννοια, κατέστη αναγκαίο να προστεθούν τμήματα που στερούνταν γεωμετρικής ερμηνείας. Η υπόθεση του Χοτζ έρχεται να βάλει τάξη σε αυτό το χάος, δημιουργώντας μια γέφυρα μεταξύ αλγεβρικών δομών και της γεωμετρίας τους. Προέκυψε ως αποτέλεσμα του ερευνητικού έργου του μαθηματικού Χ. Ντ. Χοτζ μεταξύ 1930 και 1940.

Εξίσωση Νέιβιερ - Στόουκς
Κύματα ακολουθούν τη βάρκα μας, καθώς κινούμαστε στην επιφάνεια μιας λίμνης, ενώ κύματα αέρος ακολουθούν τα σύγχρονα αεροσκάφη, καθώς αυτά πετούν στον αέρα. Μαθηματικοί και φυσικοί πιστεύουν ότι μπορεί να βρεθεί εξήγηση και να προβλεφθεί η συμπεριφορά των κυμάτων αυτών, μέσα από την κατανόηση της λύσης της Εξίσωσης Νέιβιερ - Στόουκς.
Αν και οι εξισώσεις αυτές καταγράφηκαν τον 19ο αιώνα, ακόμη και σήμερα αδυνατούμε να τις κατανοήσουμε. Οι μαθηματικοί καλούνται σήμερα να εκπονήσουν μαθηματική θεωρία, η οποία θα ξεκλειδώσει τα μυστικά που κρύβει η Εξίσωση Νέιβιερ - Στόουκς.

Θεωρία Γιανγκ - Μιλς
Οι νόμοι της κβαντικής Φυσικής είναι για τον κόσμο των στοιχειωδών σωματιδίων ό,τι και οι Νόμοι του Νεύτωνα για τον γύρω μας κόσμο.
Σχεδόν πριν από πενήντα χρόνια, οι μαθηματικοί Γιανγκ και Μιλς εισήγαγαν εντυπωσιακό νέο πλαίσιο, για την περιγραφή των στοιχειωδών σωματιδίων, χρησιμοποιώντας δομές που συναντιούνται και στη Γεωμετρία. Η Κβαντική Θεωρία Γιανγκ - Μιλς αποτελεί σήμερα τη βάση σχεδόν όλων των θεωριών στοιχειωδών σωματιδίων, ενώ οι προβλέψεις της έχουν τύχει πειραματικής μελέτης σε πολλά εργαστήρια. Η μαθηματική της βάση παραμένει, όμως, ασαφής. Η επιτυχημένη χρήση της θεωρίας Γιανγκ - Μιλς για την περιγραφή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων στοιχειωδών σωματιδίων εξαρτάται από μιαν ανεπαίσθητη κβαντική μηχανική ιδιότητα, που ονομάζουμε «χάσμα μάζας»: τα κβαντικά σωματίδια έχουν θετική μάζα, παρότι τα κλασικά κύματα μετακινούνται με την ταχύτητα του φωτός. Η ιδιότητα αυτή ανακαλύφθηκε πειραματικά από φυσικούς και επιβεβαιώθηκε με τη βοήθεια προσομοιώσεων σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές, χωρίς ωστόσο να έχει εκφρασθεί θεωρητικά.
Η πρόοδος στην επιβεβαίωση της θεωρίας Γιανγκ - Μιλς θα απαιτήσει, όμως, την

υιοθέτηση θεμελιωδών νέων ιδεών στη Φυσική και τα Μαθηματικά.

Υπόθεση του Ρίμαν

Το 1859, ο Μπέρνχαρτ Ράιμαν παρουσίασε την υπόθεση, που είναι η μόνη που απομένει αναπόδεικτη από τον κατάλογο του Χίλμπερτ. Η υπόθεση αφορά την αλληλουχία των πρώτων αριθμών μεταξύ των θετικών ακέραιων. Πρώτος είναι κάθε θετικός αριθμός, εκτός του 1, ο οποίος δεν διαιρείται παρά μόνο από τον εαυτό του και το 1.

Οι πρώτοι δέκα πρώτοι αριθμοί είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 και 29. Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι, αλλά η συχνότητά τους μειώνεται όσο επεκτείνεται η σειρά θετικών ακεραίων προς το άπειρο. Από τους οκτώ αρχικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς, οι μισοί είναι πρώτοι, αλλά από τους αρχικούς εκατό, μόλις το ένα τέταρτο είναι πρώτοι, ενώ από τους αρχικούς ένα εκατομμύριο θετικούς ακέραιους, μόλις ο ένας στους δέκα τρεις είναι πρώτος.

Αυτό δημιουργεί το ερώτημα εάν μπορούμε να εξαγάγουμε κάποιο αξιόλογο συμπέρασμα για τον ακριβή τρόπο, με τον οποίο το ποσοστό αυτό μειώνεται σταδιακά. Το αρχικό πρότυπο της ακολουθίας πρώτων αριθμών και όσα γνωρίζουμε για τα μετέπειτα πρότυπα δεν είναι, όμως, ενθαρρυντικά. Τα διαστήματα μεταξύ των αρχικών δέκα πρώτων, για παράδειγμα, είναι 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4 και 6, μία ακολουθία που δεν μοιάζει να έχει εμφανή περιοδικότητα.

Ασχετα από το πόσο μακριά φθάνουμε στην αλληλουχία θετικών ακεραίων, ανακαλύπτουμε ομάδες πολλών πρώτων, συγκεντρωμένες κοντά η μία στην άλλη, καθώς και διαστήματα, όσο μεγάλα θέλει κανείς, στα οποία δεν συναντούμε κανέναν πρώτο αριθμό.

Οι μαθηματικοί, όμως, πέτυχαν να κατανοήσουν -εν μέρει- τον τρόπο με τον οποίο το ποσοστό των πρώτων αριθμών μειώνεται. Αν και η κατανόηση αυτή προήλθε από άλλο κλάδο των Μαθηματικών, που μοιάζει εντελώς άσχετος με τη θεωρία των θετικών ακεραίων, καθώς ασχολείται με τη διαρκή διακύμανση ενός μεγέθους σε σχέση με ένα άλλο. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη της Υπόθεσης του Ρίμαν, εάν και εφόσον επιτευχθεί, θα μπορούσε και αυτή να έχει σημαντικές πρακτικές εφαρμογές στη Φυσική και την τεχνολογία των επικοινωνιών.

Υπόθεση Μπερτς και Σουίνερτον - Ντάιερ

Οι μαθηματικοί ανέκαθεν ενδιαφέρονταν για το πρόβλημα της ανακάλυψης ακέραιων λύσεων για εξισώσεις του τύπου x^2+y^2=z^2.

Ο Ευκλείδης έδωσε την πλήρη λύση στην εξίσωση αυτή, αλλά για περισσότερο περίπλοκες εξισώσεις, αυτό καθίσταται πολύ δύσκολο. Πράγματι, το 1970, ο Ματιγιάσεβιτς έδειξε ότι το δέκατο πρόβλημα στον κατάλογο του Χίλμπερτ είναι άλυτο, δεν υπάρχει δηλαδή γενική μέθοδος επιβεβαίωσης, ότι τέτοιες εξισώσεις έχουν λύσεις σε πλήρεις αριθμούς. Αλλά σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, μπορεί να έχουμε καλύτερη τύχη.

Η Υπόθεση Μπερτς και Σουίνερτον - Ντάιερ αφορά τις λύσεις ορισμένων τέτοιων, ειδικών περιπτώσεων.