**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

## ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** ΄γστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

**Μονάδες 10**

**Β.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 5**

**Γ.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

**Μονάδες 2**

**β.** Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

**Μονάδες 2**

**γ.** Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

**Μονάδες 2**

**δ.** Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$$

**Μονάδες 2**

**ε.** ΄γστω μια συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$ και $\ell$ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} (f(x) - \ell) = 0$$

**Μονάδες 2**

## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

**α.** Να αποδείξετε ότι β=–1 και γ=1.

**Μονάδες 9**

**β.** Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$.

**Μονάδες 8**

**γ.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \overline{z_1}|$$

**Μονάδες 8**

## ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x, \quad x > 0$.

**α.** Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

**Μονάδες 6**

**β.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

**Μονάδες 6**

**γ.** ΄γστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

**i.** Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

**Μονάδες 6**

**ii.** Αν $k = -\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, e).

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ 4ο

΄γστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \,, \qquad x \in [0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,dt}, \qquad x \in (0, +\infty).$$

**α.** Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt = F(1)$

**Μονάδες 6**

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, +∞).

**Μονάδες 8**

**γ.** Αν h(1)=2, τότε:

**i.** Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)\,dt < 2\int_0^2 tf(t)dt$

**Μονάδες 6**

**ii.** Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)\,dt = \frac{1}{2}F(1)$

**Μονάδες 5**

## ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

## ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

## ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ